RATT PACK
Print and Packaging
meet the bright ideas.

Ort / Place

Datum / Date

Uhrzeit / Time

(Dienstag, 15.05.18)

Satz 4.4

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$

1) f ist beschränkt

2) $\exists x_{min}, x_{max} \in [a,b] : \forall x \in [a,b] : f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$

Beweis

1) z.z. f ist beschränkt $(\exists c > 0 : \forall x \in [a,b] : |f(x)| \leq c)$

Widerspruchsbeweis

An. : f unbeschränkt $\Rightarrow \exists \underbrace{(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \in [a,b]}_{\text{beschränkt, denn } a \leq x_n \leq b \ \forall n \in \mathbb{N}} : *$

$*$ $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.

Bolzano-Weierstraß:

$\exists$ eine konvergente Teilfolge $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge)

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = A \in \mathbb{R} \underset{\substack{\text{Stetigk. von} \\ \text{f. Satz 3.2}}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = f(A)$, d.h.

die Folge $(f(\tilde{x}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Rightarrow (f(\tilde{x}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt (Widerspruch zur Unbeschränktheit von $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$)

2) z.z. $\exists x_{max} \in [a,b) : \forall x \in [a,b] : f(x) \leq f(x_{max})$

Die Menge $Y = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ (Bild von $[a,b]$ unter f.)
ist nicht leer, da $[a,b] \neq \emptyset$, und Y ist beschränkt
(folgt aus 1)).

Ratt GmbH
6850 Dornbirn, Welloch 1
T +43 5574/22365-0
F +43 5574/22365-6
office@rattpack.eu
www.rattpack.eu

Euklid-Bolzano

$\Rightarrow s \underset{\inf}{\sup} Y < \infty$

Nach der Def. von Supremum gilt

(i) $\forall y \in Y : y \overset{\geq}{\leq} s$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 : \exists y \in Y : y \overset{< s+\varepsilon}{>} s - \varepsilon$

Dann gilt

$\varepsilon = 1 \quad \exists y_1 = f(x_1) : f(x_1) \overset{< s+1}{>} s - 1$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \exists y_2 = f(x_2) : f(x_2) > s - \frac{1}{2}$

$\vdots$

$\varepsilon = 1/n \quad \exists y_n = f(x_n) : f(x_n) > s - 1/n$

$\Rightarrow \exists (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} : s - 1/n < f(x_n) \leq s$

$s + 1/n > f(x_n) \geq s$

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt $(a \leq x_n \leq b) \Rightarrow$

$\exists (\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, d.h. $\lim\limits_{n \to \infty} \tilde{x}_n = \underset{x_{min}}{x_{max}}$

Sandwich-Lemma und Stetigkeit von f:

Stetigkeit : $\lim\limits_{n \to \infty} f(\tilde{x}_n) = f(\underset{x_{min}}{x_{max}})$

Sandwich-Lemma : $s - 1/n < f(\tilde{x}_n) \leq s \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(\tilde{x}_n) = s \overset{\substack{\text{Eindeutigkeit des} \\ \text{Grenzwerts} \\ \downarrow}}{=} f(\underset{x_{min}}{x_{max}})$

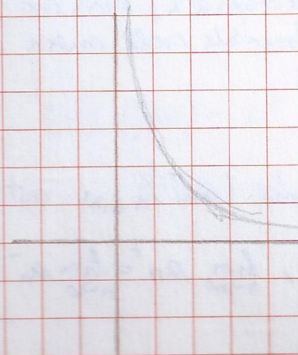
$s + 1/n > f(\tilde{x}_n) \geq s$

$\Rightarrow (\underset{\text{stetig}}{f : [a,b] \to \mathbb{R}} \to \sup Y = \max Y = f(x_{max}))$

$\inf Y = \min Y = f(x_{min})$

Bemerkungen:

Die Aussage des Satzes 4.4 gilt nicht, wenn $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ (oder $(a,b]$)



$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$ ist stetig, aber nicht beschränkt.

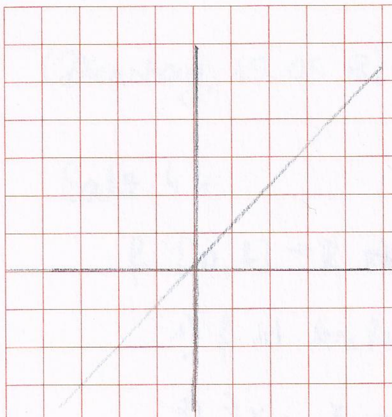
RATT PACK
Print and Packaging
meet the bright ideas.
Ort / Place
Datum / Date
Uhrzeit / Time
Ratt GmbH
6850 Dornbirn, Welloch 1
T +43 5574/22 365-0
F +43 5574/22 365-6
office@rattpack.eu
www.rattpack.eu

RATT PACK
Print and Packaging
meet the bright ideas.

Ort / Place

Datum / Date

Uhrzeit / Time



$f(x) = x \quad x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

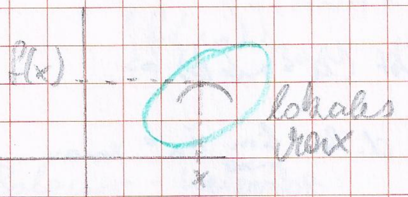
ist stetig, nimmt aber kein max oder min an.

4.5.

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diff-bar auf $(a,b]$

Falls $x \in (a,b)$ ein lokales Extremum von f ist

$$(\text{d.h. } \cancel{\forall}\ \exists \varepsilon > 0 : \forall \tilde{x} \in (a,b) : \underbrace{|x - \tilde{x}| < \varepsilon}_{\tilde{x} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)} : (f(x) \geq f(\tilde{x}) \vee f(x) \leq f(\tilde{x}))$$



dann gilt $f'(x) = 0$

Beweis

1\. Fall $\exists \varepsilon > 0 : \forall \tilde{x} \in (a,b) : |x - \tilde{x}| < \varepsilon : f(x) \geq f(\tilde{x})$

(d.h. diese Methode: bestimme die Nullstellen von $f'(x)$, d.h. die Extrema x) nur im Intervall (a,b). Randpunkte soll man seperat untersuchen)

Da $x \in (a,b)$, existieren $(a_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(a_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$a_n^- < x < a_n^+$, $|x - a_n^+| < \varepsilon$, $|x - a_n^-| < \varepsilon$, $\lim_{n\to\infty} a_n^+ = \lim_{n\to\infty} a_n^- = x$

$$\left(\text{z.B. } \underbrace{x - \frac{1}{n}}_{= a_n^-} < x < \underbrace{x + \frac{1}{n}}_{= a_n^+}\right)$$

Ratt GmbH
6850 Dornbirn, Welloch 1
T +43 5574/22365-0
F +43 5574/22365-6
office@rattpack.eu
www.rattpack.eu

Da $f(x) \geq f(a_n^-)$ und $f(x) \geq f(a_n^+)$, $n \in \mathbb{N}$, folgt

$$\frac{\overset{\le 0}{f(a_n^+)-f(x)}}{\underset{>0}{a_n^+ - x}} \leq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\overset{\le 0}{f(a_n^-)-f(x)}}{\underset{\le 0}{a_n^- - x}} \geq 0 \quad \text{und}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n^+)-f(x)}{a_n^+ - x} = f'(x) \leq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n^-)-f(x)}{a_n^- - x} = f'(x) \geq 0$$

$\Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) = 0$

2. Fall analog ... $f(x) \leq f(\tilde{x})$

Beispiele:

(i) $f(x) = x$, $x \in [0,1]$, stetig und diffbar

$f'(x) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ es existieren keine Extrema im $(0,1)$.

Ränder: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

f nimmt das globale Minimum an der Stelle $x=0$ an,

f nimmt das globale Maximum an der Stelle $x=1$ an.

($f(0)$ ist auch ein lokales Minimum, $f(1)$ ist auch lokales Maximum.)

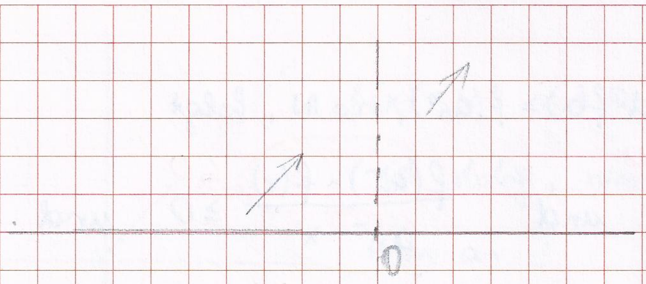
(obwohl $f'(0) \neq 0$, $f'(1) \neq 0$)

(ii) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ ist stetig und diffbar

$f'(x) = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \underset{\text{mögliche Extrema.}}{x_{1,2} = 0}$ (sind die lokale min oder max?)

RATT PACK
Print and Packaging
meet the bright ideas.
Ort / Place
Datum / Date
Uhrzeit / Time
Ratt GmbH
6850 Dornbirn, Welloch 1
T +43 5574/22365-0
F +43 5574/22365-6
office@rattpack.eu
www.rattpack.eu

RATT PACK
Print and Packaging
meet the bright ideas.
Ort / Place
Datum / Date
Uhrzeit / Time



$f'(-1) > 0$

f ist streng monoton wachsend auf $(-\infty, 0)$

$f'(1) > 0$

f ist streng monoton wachsend auf $(0, +\infty)$

$\Rightarrow$ $x = 0$ ist kein Extremum.

Monotonie von f und Eigenschaften von f'

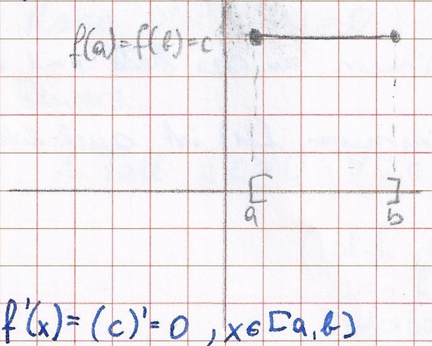
4.6. Satz von Rolle: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und $\underbrace{\text{stetig diffbar}}_{\text{f ist diffbar und f' stetig.}}$ auf (a,b).

Dann $\exists \dot{x} \in (a,b) : f'(x) = 0$

(d.h. f besitzt ein Extremum $x \in (a,b)$, falls …
$f(a) = f(b)$)

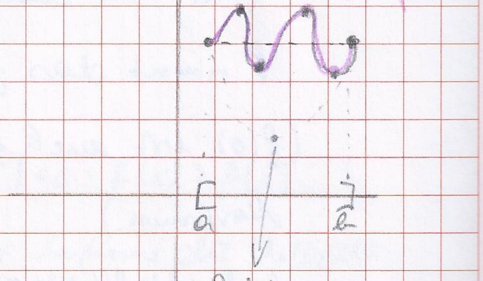
Beweisidee:

1. Fall



oder 2. Fall

alle • sind Extrema wo $f'(x)=0$



Extremum von f, wo $f'(x)=0$

$f'(x) = (c)' = 0$, $x \in [a,b]$

d.h. alle $x \in (a,b)$ sind Extrema von f.

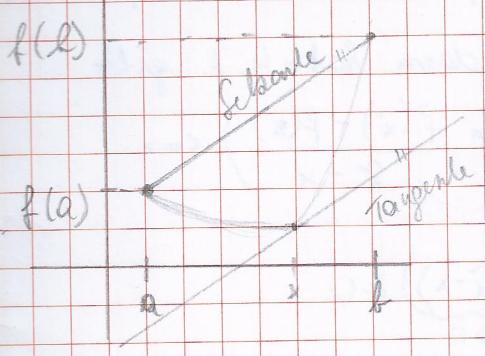
Ratt GmbH
6850 Dornbirn, Welloch 1
T +43 5574/22 365-0
F +43 5574/22 365-6
office@rattpack.eu
www.rattpack.eu

4.7. Satz (Zwischenwertsatz für Ableitungen)

sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und

stetig diff-bar auf (a,b). Dann ~~gilt~~

$$\exists\, x \in (a,b) : \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{Steigung der Sekante durch } (a,f(a)) \text{ und } (b,f(b))} = f'(x)$$



Beweis:

Definiere $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, $x \in [a,b]$

g ist stetig auf $[a,b]$, da f stetig ist

g ist stetig diff-bar auf (a,b), da f stetig diffbar ist.

$$g(a) = f(a) = g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{(\cancel{b-a})}(\cancel{b-a}) = f(a)$$

$\underset{\text{Satz 4.6.}}{\Rightarrow}$ $\exists\, x \in (a,b) : g'(x) = 0 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\underbrace{(x-a)'}_{1} = 0$ $\Rightarrow$ Behauptung

4.8. Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$,

stetig diff-bar auf (a,b).

Dann ist f

(i) genau dann monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$

(ii) —— " —— streng monoton wachsend, wenn $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$

(iii) — " —— monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$

(iv) — " —— streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$

RATT PACK
Print and Packaging
meet the bright ideas.
Ort / Place
Datum / Date
Uhrzeit / Time
Ratt GmbH
6850 Dornbirn, Welloch 1
T +43 5574/22 365-0
F +43 5574/22 365-6
office@rattpack.eu
www.rattpack.eu

RATT PACK
Print and Packaging

meet the bright ideas.

Ort / Place

Datum / Date

Uhrzeit / Time

Beweis: (monoton wachsend)

"⇒" f ist monoton wachsend, d.h. für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n > x$

$x_n \in [a,b]$ gilt

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\geq 0}{f(x_n) - f(x)}}{\underset{>0}{x_n - x}} \geq 0, x \in (a,b)$$

"⇐" Für ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) \geq 0$ wähle $\tilde{x}$, sodass

$a < x < \tilde{x} \leq b$. Nach dem Satz 4.7. gilt

$$\exists \tilde{\tilde{x}} \in (a,b): \left(f'(\tilde{\tilde{x}}) = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} \right) \iff$$

multiplizieren mit $(\tilde{x} - x)$

$$\left(f(\tilde{x}) - f(x) = \underbrace{f'(\tilde{\tilde{x}})}_{\geq 0} \underbrace{(\tilde{x} - x)}_{>0} \right) \geq 0$$

da $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow \forall x < \tilde{x} : f(\tilde{x}) \geq f(x)$

Ratt GmbH
6850 Dornbirn, Welloch 1
T +43 5574/22 365-0
F +43 5574/22 365-6
office@rattpack.eu
www.rattpack.eu